ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

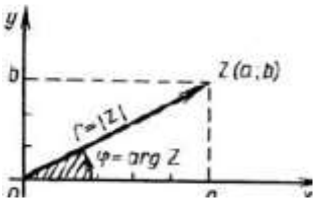
по дисциплине «Математика»

дата 15.12.2023

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»

1. Тригонометрическая форма комплексного числа



Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображено в виде вектора с началом в точке $O(0; 0)$ и концом $Z(a; b)$.

Длина вектора, изображающего комплексное число z, называется **модулем** этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Для любого комплексного числа z его модуль определяется однозначно по формуле $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти с помощью формул: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

Из соотношений

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ следует: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Если в запись комплексного числа **z** вместо **a** и **b** подставить эти значения, то получимz $= a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Получили новую форму записи комплексного числа:

$z = r\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$,которая называется **тригонометрической формой комплексного числа**

Пример. Представить в тригонометрической форме комплексное число $1 - i$.

$a = 1, b = -1.$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$

$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$

$\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\varphi = \frac{7}{4}\pi.$

$1 - i = \sqrt{2}\ (\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi).$

2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1) Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Пример. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2\cdot(\cos 50^o + i\sin 50^o)$,

$z_2 = 1\cdot(\cos 40^o + i\sin 40^o)$

Решение:

$z_1 \cdot z_2 = 1\cdot 2 \cdot (\cos(50^o + 40^o) + i\sin(50^o + 40^o)) = 2(\cos 90^o + i\sin 90^o) = 2(0 + i) = 2i.$

2) Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

Пример. Найти частное комплексных чисел $z_1 = 2\cdot(\cos 50^o + i\sin 50^o)$,

$z_2 = 1\cdot(\cos 40^o + i\sin 40^o)$

Решение:

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{1}(\cos(50^o - 40^o) + i\sin(50^o - 40^o)) = 2(\cos 10^o + i\sin 10^o).$

3) Возведение в степень чисел в тригонометрической форме

Возвести комплексное число в n – ю степень можно по формуле:

$$z^n = (r^n)[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

Этуформулуприr $=1$ частоназываютформулойМуавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),\ n \in N.$

Пример. Вычислите $(1+i)^{100}$.

Запишем комплексное число $1+i$ в тригонометрической форме.

$a = 1,\ b = 1.$

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$(1+i)^{100} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4})]^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 100 + i\ \sin\frac{\pi}{4}\cdot 100) =$

$2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{50}$.

4) Извлечение квадратного корня из комплексного числа

При извлечении квадратного корня из комплексного числа $a + bi$ имеем два случая:

если $b > o$, то $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$

если $b < o$, то $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$

Пример. Вычислите $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$.

Так как $b < o$, то воспользуемся формулой

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+3}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+3}}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1+2}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+2}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = -\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru